МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ

ФБГОУ ВПО «БРЯНСКЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

с применением простейших теорем теории вероятностей
(методические указания)

для студентов-бакалавров по направлениям
110800 Агроинженерия, 151000 Технологические машины и оборудование, 190100 Наземные транспортно-технологические комплексы

БРЯНСК 2012

УДК 519.2(07):629.3(07):631.3(07):664(07)
ББК 22.171:36.81-5:38.6-5:40.72:40.74
З 38

Захаров, И.П. Решение задач с применением простейших теорем теории вероятностей: методические указания/ И.П. Захаров/. - Брянск.: Издательство Брянской ГСХА, 2012.-54 с.

Методические указания содержат адаптированные к учебным направлениям подробно разобранные и решенные задачи, а так же задачи для самостоятельного решения (с ответами), способствующие повышению качества усвоения материала студентами-бакалаврами при самостоятельной работе по теории вероятностей в соответствии с программой ФГОС-3 (2009 г.) по дисциплине «Математика».

Рецензент: к.т.н., доцент В. В. Кузнецов

Рекомендовано к изданию методической комиссией инженерно-технологического факультета от 14 ноября 2012г., протокол №4.

Содержание

§1. Основные сведения

В реальной практике ожидаемые события и явления А могут происходить или не происходить (случаться или не случаться). При этом в зависимости от практических условий (условий опыта) о каком-то событии А говорят, что оно равновозможно другому событию В, или же что оно обладает большей возможностью появления (более возможно), чем другое. Это свидетельствует о том, что возможность события А допускает количественную оценку, т.е. может быть исчислена. Меру Р, исчисляющую возможность события А, называют вероятностью события А и обозначают Р(А).

При изучении общих свойств этой меры Р (вероятности), вообще говоря, не требуется никакого знания о причинах, вызывающих событие А. Поэтому от рассмотрения и учета таких причин в дальнейшем отвлекаются (абстрагируются), информируя об этом читателя тем способом, что к термину «событие» иногда прибавляют слово «случайное», получая равносильный термин «случайное событие».

1.1. Теоретико-множественное моделирование вероятностных задач

В теории вероятностей задачи реальных опытов моделируют, подбирая подходящее множество $\Omega = \{\omega\}$(**пространство элементарных событий**), элементы ω которого (**элементарные события** или элементарные исходы) изображают основные (простейшие) исходы опыта. Далее выделяют некоторый класс $\widetilde{A}$ подмножеств $A \subset \Omega$ такой, что:

1. $\Omega \in \widetilde{A}$.

2. Если $\{A_n\}$ есть последовательность множеств из Ω, каждое класса $\widetilde{A}$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \widetilde{A} \qquad \text{и} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \widetilde{A}.$$

3. Если $A \in \widetilde{A}$, то $\overline{A} \in \widetilde{A}$.

Эти выделенные подмножества A (составляющие класс $\widetilde{A}$), и только они, называются **событиями** (случайными событиями). С их помощью изображают все возможные исходы испытаний, связанные с данной задачей. Таким образом, не всякое, вообще говоря, подмножество $A \subset \Omega$ будет носить название «событие».

Само множество Ω называют **достоверным** событием в данной модели. Множество $\varnothing$, не содержащее ни одного элемента из Ω, называют **невозможным** событием в данной модели.

Например, результаты испытаний с подбрасыванием кубика, грани которого занумерованы цифрами от 1 до 6, можно смоделировать пространством $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где, например, ω_5 означает элементарное событие, изображающее выпадение «пятерки». В класс $\widetilde{A}$ можно включить все подмножества $A \subset \Omega$. Тогда подмножество $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$ изображает событие, состоящее в выпадении четной цифры (четной грани). При этом событие A считается наступившим, если результатом испытания (подбрасывания кубика) стало одно из элементарных событий ω, входящих в A. Таким образом, появление события A происходит за счет появления отдельных его элементов ω.

События A и B называют **равными** (эквивалентными, равносильными) и записывают A=B, если каждый элемент ω одного из них является элементом другого. В реальной ситуации считают, что A=B, если при наступлении одного из них всегда происходит и второе.

Часто для наглядности множество Ω изображают в виде некоторой геометрической фигуры (кривой линии, области на плоскости, пространственного тела или просто нескольких точек пространства). При этом элементарные события ω изображаются точками, а события A, B,…, - частями фигуры Ω (рисунок 1а).

Суммой A+B+C нескольких событий называется событие, состоящее из всех тех элементарных событий ω, которые принадлежат хотя бы одному из слагаемых A, B, C (рисунок 1б). В реальной ситуации сумма A+B+C считается наступившей, если выполнено хотя бы одно из условий A, B, C.

Произведением ABC нескольких событий A, B, C называется событие, состоящее из всех тех элементарных событий ω , которые принадлежат всем сомножителям A, B, C (рисунок 1в). В реальной ситуации произведение считается наступившим, если выполнены все условия: и A, и B, и C.

Разностью A-B событий A и B называется событие , состоящее из всех тех элементарных событий ω, которые входят в A, но не входят в B (рисунок 1г).

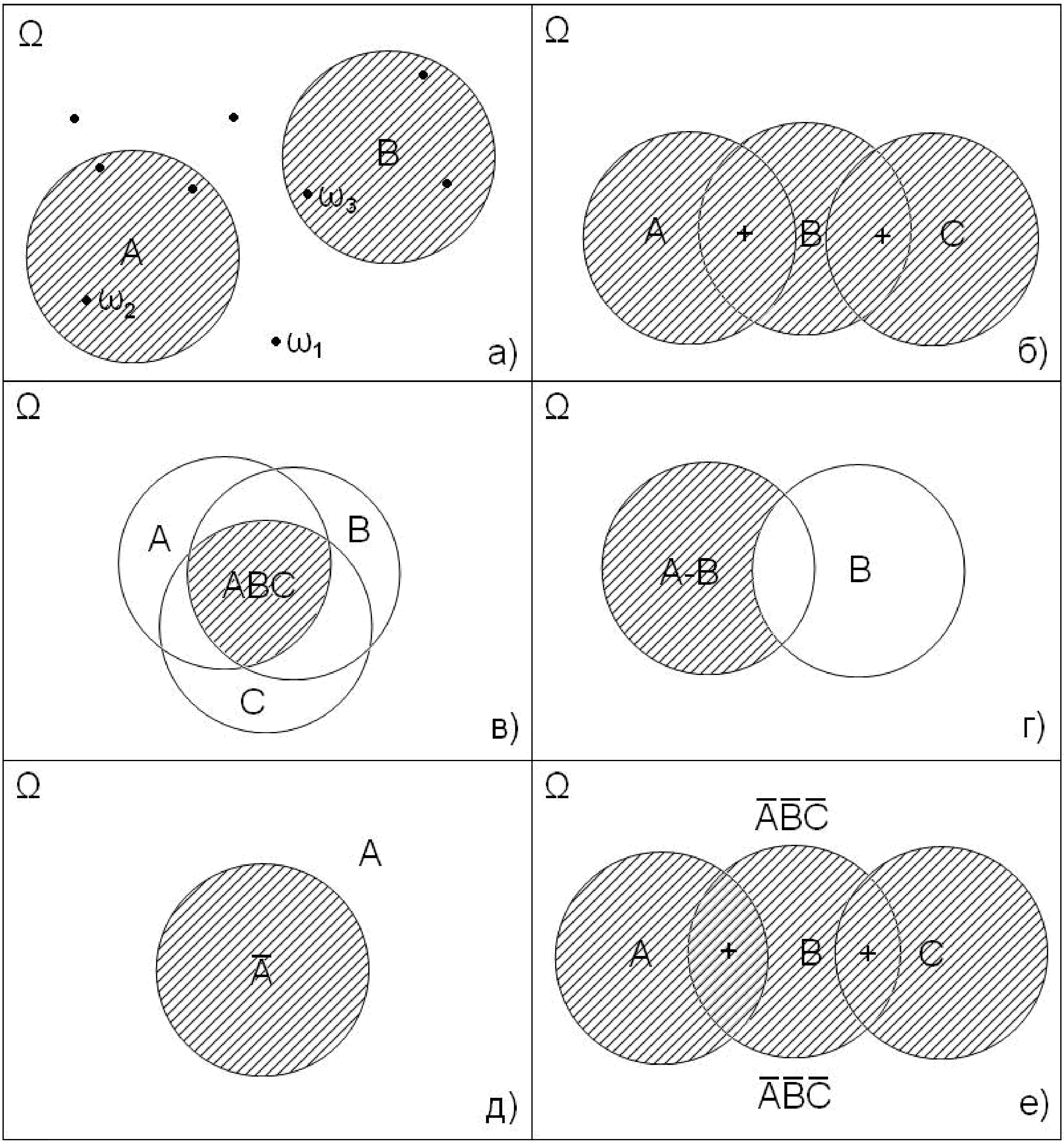

Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация событий

Событие $\overline{A} = \Omega - A$ называется **противоположным** событию A (рисунок 1д). Очевидно, что $A + \overline{A} = \Omega$ и $A\overline{A}$=Ø. Логически $\overline{A}$ («не A») означает полное **отрицание** условия A, при этом $\overline{\overline{A}} = A$. Нетрудно убедиться, что отрицание суммы равно произведению отрицаний:

$$\overline{(A + B + C + D + ...)} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \cdot ..., \qquad (1)$$

и отрицание произведения равно сумме отрицаний:

$$\overline{ABCD...} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D} + ... \qquad (2)$$

События A и B называются **несовместными**, если они не имеют общих элементов ω, т.е. AB=∅. Если же они имеют общие элементы (т.е. $AB \neq \varnothing$), то называются **совместными**. На рисунке 1а) события A и B несовместны. На рисунке 1б) A и C несовместны, однако A и B совместны; также совместны B и C. Очевидно, что A и $\overline{A}$ всегда несовместны.

1.2. Конструктивные способы задания вероятности P(A).

Если пространство $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ..., \omega_n\}$ состоит из конечного числа n элементов ω_i и каждому элементу ω_i, $i = \overline{1,n}$, присвоено неотрицательное число $p_i = P(\omega_i)$ (вероятность события ω_i) так, что

$$p_1 + p_2 + ... + p_i + ... + p_n = 1, \qquad (3)$$

то **вероятность** P(A) события $A \subset \Omega$ полагают равной

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i). \qquad (4)$$

Если, в частности, множество Ω состоит из n равновозможных (т.е. в отношении которых нет оснований полагать, что одно из них более возможно, чем другое) элементарных событий, то в силу (3) будем иметь $P(\omega_i) = p_i = 1/n$, $i = \overline{1,n}$, и тогда для события A, содержащего ровно k элементов ω_i (которые называются «**благоприятствующими**» событию A), из (4) получим:

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A}P(\omega_i)=k\cdot\frac{1}{n}=\frac{k}{n}. \qquad (5)$$

Этот случай равновозможных элементарных событий называется «классическим», и, таким образом, **классической вероятностью** P(A) события A называется отношение k(A)/n числа k(A) элементарных событий, «благоприятствующих» появлению A, к общему числу n всех элементарных событий в Ω, т.е.

$$P(A)=\frac{k(A)}{n}. \qquad (6)$$

Иногда приходится рассматривать пространства $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_i,...\}$, состоящие из счетного (а значит бесконечного) числа элементов с числовым рядом

$$P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_i)+...=p_1+p_2+...+p_i+...=1,$$

$$p_i\ge 0,\ i=\overline{1,\infty}. \qquad (7)$$

В этом случае также полагают

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A}P(\omega_i). \qquad (8)$$

Если пространство Ω является геометрической фигурой (и тогда события A – её части), то определяют **геометрическую** вероятность P(A) события A по формуле:

$$P(A)=\frac{\text{мера}(A)}{\text{мера}(\Omega)}, \qquad (9)$$

где мера (A) в простейших случаях означает либо длину, либо площадь, либо объем множества A.

При проведении многократных испытаний определяют **статистическую** вероятность P(A) события A по формуле

$$P(A) = \lim_{m\to\infty} \frac{m(A)}{m}, \qquad (10)$$

где m – число всех произведенных испытаний, m(A) – число испытаний, в которых событие A произошло и $\frac{m(A)}{m} = W(A)$ - **относительная частота** события A в серии из m испытаний.

Если число m произведенных испытаний велико, то приближенно можно принять

$$P(A) \approx W(A) = \frac{m(A)}{m}. \qquad (11)$$

Во всех случаях (4)-(11) вероятность P(A) указывает на «долю» события A (во всем пространстве Ω). Иногда «долю» выражают в процентах. Сообразно этому, слова «уверенность в выполнении условия A равна 70%» или «надежность утверждения A равна 70%» надо понимать как «вероятность события A равна 0,7».

1.3. Свойства вероятности P(A)

1) $$P(\varnothing)=0 \le P(A) \le 1 = P(\Omega), \qquad (12)$$

где A – произвольное событие из Ω;

2) Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$.

3) $$P(A+B)=P(A)+P(B) - P(AB), \qquad (13)$$

где A,B - произвольные события (совместные или несовместные);

4) Вероятность появления хотя бы одного события из четырех произвольных:

P(A+B+C+D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-P(AB)-P(AC)-P(AD)-P(BC)-

-P(BD)-P(CD)+P(ABC)+P(ACD)+P(ABD)+P(BCD)-P(ABCD). (14)

5) Если события A_i и A_j, $i \neq j$, $i,j = \overline{1,n}$, попарно несовместны (т.е. $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$), то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_i + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_i) + \ldots + P(A_n); \quad (15)$$

6) $$P(A) = 1 - P(\overline{A}); \; P(\overline{A}) = 1 - P(A); \; P(A) + P(\overline{A}) = 1. \quad (16)$$

При решении задач часто удобно вычислить вероятность противоположного события $\overline{A}$, а затем по формуле (16) вычислить вероятность данного события A.

События A и B называются **независимыми,** если

$$P(AB)=P(A)P(B). \quad (17)$$

Если P(A)=0, то при любом B события A и B будут независимыми (как нетрудно это увидеть из (17)).

Независимость событий A и B ценна тем, что удается очень просто вычислять вероятность P(AB) произведения AB, если известны P(A) и P(B).

Если $P(A) \neq 0$, то определяют **условную** вероятность $P_A(B)$ события B при условии A:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \quad (18)$$

Условная вероятность $P_A(B)$ обладает теми же свойствами, что и (безусловная) вероятность P(B). Если P(A)>0, то независимость A и B эквивалентна равенству

$$P_A(B) = P(B). \quad (19)$$

В свою очередь, чтобы установить (19), надо прежде вычислить условную вероятность $P_A(B)$. В конкретных задачах это зачастую удается сделать без явного использования формулы (18) методом нового оценивания вероятности события B с учетом того, что A уже произошло. Более того, если в ходе такого нового оценивания становится понятным, что вероятность любого из двух событий A и B не меняется от того, произошло уже или нет еще другое событие из этих двух, то сразу делают вывод о независимости A и B (без вычисления $P_A(B)$ и $P_B(A)$).

Например, если при одновременном бросании двух кубиков событие A – выпадение какой-либо грани на первом кубике, событие B – выпадение какой-то грани на втором кубике, и P(A) – классическая вероятность, то вполне ясно, что события A и B независимы.

Если равенство (17) не выполняется, то события A и B называются **зависимыми.** У зависимых событий при $P(A)>0$ будет $P_A(B) \neq P(B)$, т.е. появление события A изменяет вероятность события B.

7) Если события A и B – произвольны (зависимы или независимы) и $P(A) \neq 0$, то:

$$P(AB)=P(A)\,P_A(B). \tag{20}$$

8) Аналогично, для четырех произвольных событий будем иметь:

$$P(ABCD)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)\cdot P_{ABC}(D). \tag{21}$$

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются независимыми в совокупности (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных событий.

Если $A_1, A_2, ..., A_n$ – независимые в совокупности события, то при замене нескольких из них $A_i, A_j, A_k, ...$ на противоположные

$\overline{A}_i, \overline{A}_j, \overline{A}_k,...$, получим новый набор независимых в совокупности событий. В частности, события $\overline{A}_1, \overline{A}_2,..., \overline{A}_n$ будут независимыми в совокупности.

Для независимых в совокупности событий справедливы формулы (22) и (23):

9) $$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n), \qquad (22)$$

10) $$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P\left(\overline{(A_1 + A_2 + ... + A_n)}\right) =$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_n). \qquad (23)$$

Формула (23) часто используется при нахождении вероятности суммы независимых событий (т.е. вероятности появления хотя бы одного события из данной группы A_1, A_2,…, A_n независимых событий).

Формулы (13)-(16) образуют группу формул сложения вероятностей. К этой группе примыкает формула (23). Формулы (17) и (20)-(22) называют формулами умножения вероятностей.

11) Если $\Omega = H_1 + H_2 + ... + H_n$, события (гипотезы) H_i, $i = \overline{1, n}$, несовместны и $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1, n}$, то для произвольного события $A \subset \Omega$ справедлива формула полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A). \qquad (24)$$

Теоретико-множественный подход к определению операций над событиями (суммы, произведения, разности, отрицания) вместе с простой по структуре согласованностью вероятности P с этими операциями (формулы сложения и умножения вероятностей) служат надежной основой для построения ясного и логически стройного решения вероятностных задач. Приведенные и разобранные ниже задачи на применение формул сложения и умножения вероятностей призваны помочь формированию у студентов прочных навыков математического мышления, используя при этом интерес к вопросам избранного профиля, а также приобретению навыков применения математического аппарата к моделированию и решению типовых проблем профильного характера.

В приводимых задачах при поступлении условного сигнала I на элемент схемы (т.е. при предъявлении к элементу требований осуществить свои рабочие функции) этот элемент может либо «сработать», либо «отказать» (выйти из строя). Это же касается и участка схемы или всей схемы. Например, если штатная работа схемы состоит в проводке через нее электрического тока I, а она ток I не пропустила, то схема считается «отказавшей».

Во всех задачах способности элементов «срабатывать» или «отказывать» считаются независимыми в совокупности (если только не оговорено противное) от состояния других элементов. Из этого следует, что такие события, как отказы элементов, независимы в совокупности. Независимыми в совокупности надо считать (если не оговорено противное) и срабатывания элементов при наступлении условий их активизации и работы.

Надежностью элемента (схемы, устройства) назовем вероятность его безотказной работы.

Далее принято: p – надежность элемента, q – вероятность отказа элемента, P - надежность схемы (механизма, прибора, технологической линии, комплекса и т.д.), Q – вероятность отказа схемы (механизма, прибора, технологической линии, комплекса и т.д.).

Очевидно, что:

$$p+q=1; \quad p=1-q; \quad q=1-p; \quad P+Q=1; \quad P=1-Q; \quad Q=1-P. \qquad (25)$$

Встречающиеся на практике инженерные системы имеют многообразные графы (схемы) конструктивных и технологических соединений своих элементов. При этом и условия сохранения работоспособности всей системы (схемы) многоразличны: от условия сохранения работоспособности непременно каждым элементом до условия сохранения работоспособности лишь некоторыми элементами, или даже хотя бы одним. Сообразно этому и способы расчета надежности схемы могут меняться.

В предлагаемом издании формулы (17) и (22) интерпретируются преимущественно на примерах последовательного соединения элементов в конструктивную или технологическую цепочку (которая, как часто случается на практике, может выполнить свои функции при условии, что непременно (одновременно) сохраняют работоспособность все установленные в ней элементы); а формулы (13), (14), (15) и (23) интерпретируются преимущественно на схемах параллельной работы элементов (когда, как часто случается на практике, схема может выполнять данную инженерную задачу, если сохраняют работоспособность хотя бы некоторые элементы, или даже хотя бы один элемент). Такая интерпретация употреблена только из понятных соображений удобств и упрощений.

Задачи повышенной трудности отмечены в тексте звездочками *.

§2. Задачи со схемами последовательного соединения элементов

2.1. Методические указания

В данном параграфе технологическая (логическая) схема считается работающей, если работают все установленные в ней элементы.

Задача 1

Вероятность p_1 невыхода из строя (надежность) трактора равна 0,9; вероятность p_2 невыхода из строя (надежность) прицепного картофелеуборочного комбайна равна 0,8. Какова вероятность (надежность Р) уборки картофеля без простоев по техническим причинам, если считать, что все другое обеспечение работает без отказов? Какова вероятность отказа системы трактор-комбайн? Построить структурно-логическую схему задачи.

Решение.

Решение вероятностных задач начинают с обозначения событий:

Событие А – трактор не выйдет из строя (сработает без отказов);

Событие В – картофелеуборочный комбайн не выйдет из строя (сработает без отказов);

Событие К – уборка будет производиться без простоев;

Событие D – возникновение в системе трактор-комбайн отказов.

Тогда по смыслу произведения событий, событие АВ означает, что оба составляющие систему механизма – трактор и комбайн не выйдут из строя, т.е. будут работать. Тогда событие К будет эквивалентно событию АВ, и для их вероятностей получим Р(К)=Р(АВ). Считая события А и В независимыми, по формуле (17) находим:

$$P = P(K) = P(AB) = P(A) \cdot P(B) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72.$$

Далее, для события К его отрицанием будет $\overline{K}$, которое означает, что нет такого, что уборка производится без простоев по техническим причинам, то есть появляются простои, т.е. в системе трактор-комбайн возникнут отказы.

Из сказанного вытекает, что $D = \overline{K}$ и $P(D) = P(\overline{K})$. Поэтому получаем:

$$Q = P(D) = P(\overline{K}) = 1 - P(K) = 1 - P = 1 - 0{,}72 = 0{,}28.$$

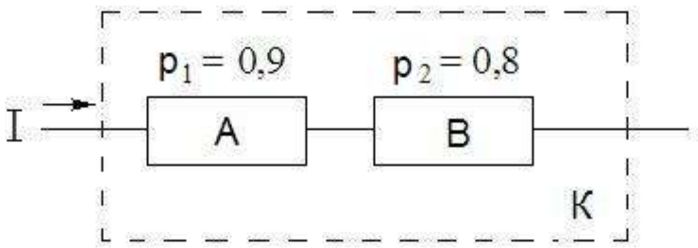

Схема 1 - Структурно-логическая схема задачи 1

Ответ: P=0,72; Q=0,28.

Задача 2

Вероятности p_1, p_2, p_3 невыхода из строя (надежности) трактора, картофелеуборочного комбайна и отвозящего картофель автомобиля соответственно равны 0,9, 0,8, 0,95. Какова вероятность (надежность) P уборки картофеля без простоев по техническим причинам? Считать, что все другое обеспечение работает без отказов. Какова вероятность Q отказа системы трактор - комбайн - автомобиль?

Построить структурно-логическую схему задачи.

Решение.

Решение начинаем с обозначения событий:

A – трактор не выйдет из строя;

B – комбайн не выйдет из строя;

C – автомобиль не выйдет из строя;

K – уборка производится без простоев;

D – появление отказов в системе трактор – комбайн – автомобиль;

ABC – механизированная бригада (система) работает без отказов.

Тогда K=ABC. Считая события A, B, C независимыми в совокупности, по формуле (22) получим:

$$P = P(K) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}95 = 0{,}684.$$

Так как, очевидно, $D = \overline{K}$ и $P(D) = P(\overline{K})$, то

$$Q = P(D) = P(\overline{K}) = 1 - P(K) = 1 - P = 1 - 0{,}684 = 0{,}316.$$

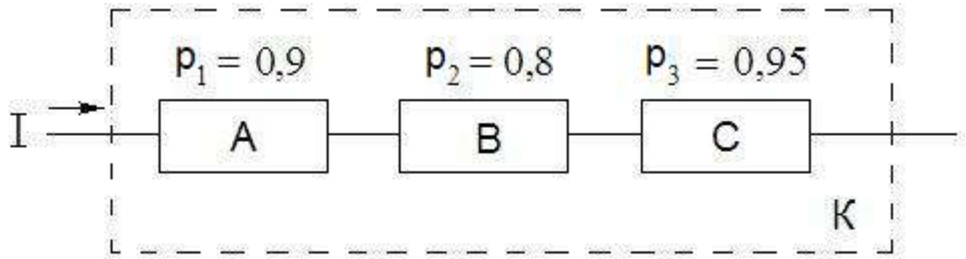

Схема 2 - Структурно-логическая схема задачи 2

Ответ: P=0,684; Q=0,316.

Задача 3

Надежности элементов R_1, R_2, R_3 в электрической схеме 3 при замыкании ключа K равны соответственно p_1=0,95, p_2=0,92, p_3=0,9. Какова надежность P схемы? Какова вероятность Q отказа схемы 3? Отказ каждого элемента считать независимым от состояния других элементов.

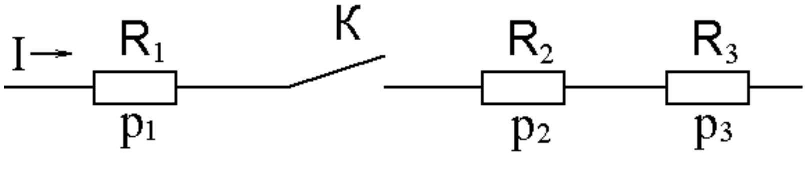

Схема 3

Решение.

Введем обозначения событий при включении ключа К:

A – срабатывание элемента R_1;

B – срабатывание элемента R_2;

C – срабатывание элемента R_3;

ABC – срабатывание всех элементов (срабатывание всей цепи).

Поскольку A, B, C – независимые в совокупности события, то надежность P всей цепи на схеме 3 вычисляется по формуле (22):

$$P = P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}95 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}9 = 0{,}7866.$$

Тогда вероятность отказа Q схемы равна:

$$Q=1-P=1-p_1 \cdot p_2 \cdot p_3=1-0{,}7866=0{,}2134.$$

Ответ: P=0,7866; Q=0,2134.

Задача 4

В технологической линии (схема4), перерабатывающей полуфабрикат I с целью повышения концентрации полезных веществ путем сепарирования, фильтрации, выпаривания влаги, промывания водой или растворителями, ректификацией, и другими воздействиями, соединены последовательно n независимых элементов (аппаратов) R_i, $i = \overline{1, n}$ с надежностями p_i, $i = \overline{1, n}$. Вычислить надежность P схемы (линии) и показатель ее отказов Q, если вся схема считается работающей только при условии, что работают все ее элементы.

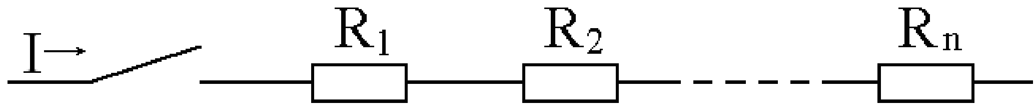

Схема 4.

Решение.

Поскольку для срабатывания схемы необходимо срабатывание всех ее элементов, то по формулам (22) и (25) получаем:

$$P=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n; \quad Q=1-P=1-p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n.$$

Задача 5

В технологической линии (схема 5) последовательно соединены три независимо работающих аппарата R_1, L и R_2. Вероятности сбоя и некачественной их работы при переработке полуфабриката I равны соответственно $q_1=0,1$; $q_L=0,15$; $q_2=0,05$. Выпускаемая продукция получается качественной лишь в случае качественной работы каждого аппарата. Вычислить надежность P (вероятность качественной работы) и показатель отказов Q (вероятность брака) всей линии.

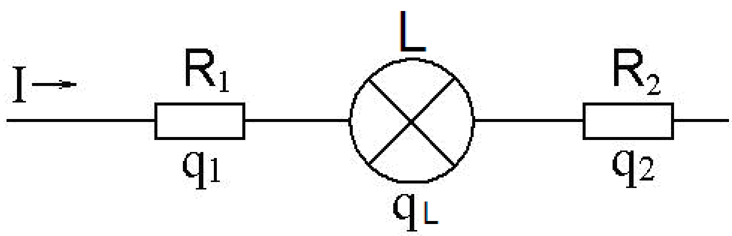

Схема 5.

Решение.

Введем обозначения событий:

A – качественная работа аппарата R_1;

$\overline{A}$ – некачественная работа аппарата R_1;

B – качественная работа аппарата R_2;

$\overline{B}$ – некачественная работа аппарата R_2;

C – качественная работа аппарата L;

$\overline{C}$ – некачественная работа аппарата L;

Тогда ABC – качественная работа всех аппаратов (а значит всей линии).

Вычисляем надежности аппаратов линии:

$$p_1 = P(R_1) = P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - q_1 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9;$$

$$p_2 = P(R_2) = P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - q_2 = 1 - 0{,}05 = 0{,}95;$$

$$p_L = P(L) = P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - q_L = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$

Надежность P всей линии на схеме 5 это вероятность качественного срабатывания цепи, т.е. вероятность P(ABC) срабатывания всех элементов (аппаратов). По условию, события A, B, C – независимы в совокупности. Поэтому по формуле (22) получим:

$$P = P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_L =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}85 = 0{,}72675 \approx 0{,}727.$$

По формуле (25) получим: Q=1-P$\approx 1 - 0{,}727 = 0{,}273$.

Ответ: $P \approx 0{,}727$; $Q \approx 0{,}273$.

Заметим, что здесь $P=(1-q_1)(1-q_2)(1-q_L)$ и

$$Q = 1 - P = 1 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_L = 1 - (1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_L).$$

Задача 6

Найти P и Q схемы 4, если даны вероятности отказов $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ее элементов.

Решение.

Поскольку для надежностей элементов имеем $p_i=1-q_i$, $i = \overline{1,n}$, то для надежности P схемы при помощи (22) получаем:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = (1 - q_1) \cdot (1 - q_2) \cdot \ldots \cdot (1 - q_n),$$

а для показателя отказов Q схемы будем иметь:

$$Q = 1 - P = 1 - (1 - q_1) \cdot (1 - q_2) \cdot \ldots \cdot (1 - q_n).$$

Задача 7

Схема 6 составлена из пяти одинаковых и независимых элементов. Какова должна быть надежность p отдельных элементов, чтобы надежность всей схемы равнялась бы P_0? Схема считается работающей, если работают все ее элементы.

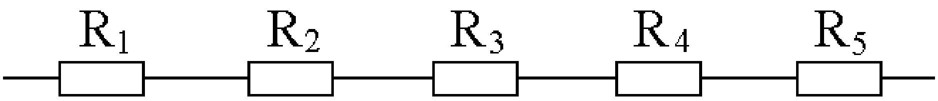

Схема 6.

Решение.

Поскольку $P_0 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 = p^5$, то $p = \sqrt[5]{P_0}$.

Ответ: $p = \sqrt[5]{P_0}$.

Задача 8

На схеме 7 технологическая линия составлена из пяти независимых в совокупности элементов, из которых первый R_1 имеет надежность $p_1 = 0,99$, а остальные сменные элементы однотипны и обладают одинаковой вероятностью безотказной работы (надежностью) p. Каково должно быть число p, чтобы вся схема обладала надежностью P не менее 95%? Схема считается работающей, если работают все ее элементы.

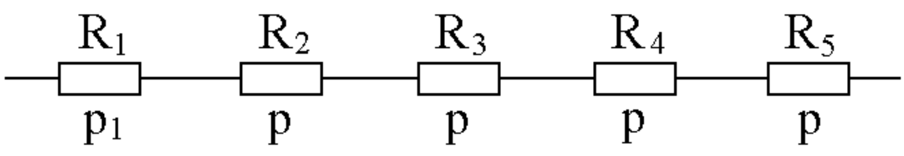

Схема 7.

Решение.

Вычислим надежность схемы 7:

$$P=0{,}99p^4.$$

По условию $P \geq 0{,}95$, т.е.:

$$0{,}99 \cdot p^4 \geq 0{,}95;\ p^4 \geq \frac{0{,}95}{0{,}99} = \frac{95}{99};\ \ p \geq \sqrt[4]{\frac{95}{99}} = 0{,}9897.$$

Ответ: $p \geq 0{,}9897$.

Задача 9

Пять независимых в совокупности элементов (аппаратов) планируется соединить по схеме 8. Надежность элемента R_1 равна p_1=0,98. Остальные сменные элементы однотипны и вероятности их отказов равны $q_2=q_3=q_4=q_5=q=0{,}03$. Можно ли их устанавливать в схему 8, если требуется, чтобы надежность P схемы была не менее 95% (0,95)? Схема считается работающей, если работают все ее элементы.

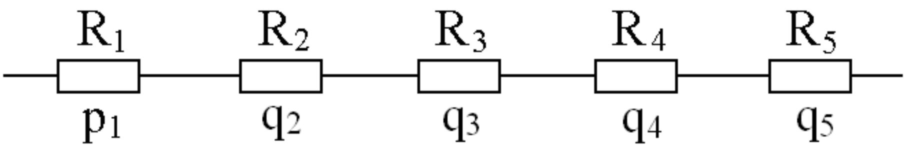

Схема 8.

Решение.

Надежности элементов R_2-R_5 равны:

$$p_i=1-q_i=1-q=1-0{,}03=0{,}97.$$

Схема 8 с такими элементами будет иметь надежность P, равную:

$$P=p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 = 0{,}98 \cdot (0{,}97)^4 \approx 0{,}86759.$$

Поскольку получили $P \approx 0{,}86759 < 0{,}95$, то элементы R_2-R_5 с q=0,03 устанавливать в схему нельзя.

Задача 10

С каким показателем отказов q нужно выбрать однотипные элементы R_2-R_5, чтобы вместе с R_1, имеющим надежность p_1=0,98, вся схема 8 имела бы надежность $P \geq 0{,}95$?

Решение.

Показатели надежности p_i элементов R_2-R_5 будут равняться:

$$p_i=1-q_i=1-q,\ i=\overline{2,5}.$$

Тогда надежность P схемы равна:

$$P=p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 = p_1 \cdot p^4 = p_1 \cdot (1-q)^4 = 0{,}98 \cdot (1-q)^4.$$

Поскольку требуется, чтобы $P \geq 0{,}95$, то получаем:

$$0{,}98 \cdot (1-q)^4 \geq 0{,}95;\ (1-q)^4 \geq \frac{0{,}95}{0{,}98} = \frac{95}{98};\ \ 1-q \geq \sqrt[4]{\frac{95}{98}} \approx 0{,}99226;$$

т.е. $1-q \geq 0{,}99226$(заметим, что надежность таких элементов будет $p \geq 0{,}99226$); $q \leq 1-0{,}99226 = 0{,}00774$.

Ответ: $q \leq 0{,}00774$.

2.2 Задачи для самостоятельного решения

Решить задачи №11-22 и построить их структурно-логические схемы.

Задача 11

Для освобождения технологической площади от товарных упаковок необходимы погрузчик и грузовой автомобиль. Вероятность выхода на работу (надежность) для погрузчика равна 0,95, а для грузовика 0,9. Какова вероятность P (надежность) того, что погрузочные работы будут проведены? Не будут проведены?

(Ответ: P=0,855; Q=0,145)

Задача 12

Для вывоза крупногабаритного груза необходим трейлер, вероятность (надежность) прибытия которого в данный день составляет 0,9. Вероятность исправности (надежность) мостового крана, осуществляющего погрузку, составляет 0,8. Какова вероятность Р того, что груз в данный день будет забран? Не будет забран?

(Ответ: Р=0,72; Q=0,28)

Задача 13

На очистке дна озера работают экскаватор, бульдозер и автомобиль-самосвал. Вероятность того, что в данный день экскаватор будет исправен равна 0,9; для бульдозера и самосвала такая вероятность составляет соответственно 0,85 и 0,8. Какова вероятность Р того, что в данный день очистные работы будут производиться?

(Ответ: Р=0,612; Q=0,388)

Задача 14

Вращательно движение от двигателя передается через муфту сцепления, КПП, карданный вал и редуктор заднего моста на задние колеса автомобиля. Надежности работы (вероятность срабатывания в штатном порядке) этих агрегатов соответственно равны 0,95; 0,9; 0,85; 0,8; 0,75; 0,7. Найти вероятность Р трогания автомобиля с места в штатном порядке.

(Ответ: Р≈0,305)

Задача 15

На данной дороге имеются две автозаправочные станции А и В. Вероятность функционирования станции А равна 0,7; станции В – 0,5. Какова вероятность Q полного необеспечения топливом всего транспорта на данной дороге?

(Ответ: Q=0,15)

Задача 16

Качество и экономичность кошения зеленых кормов зависит от правильно выбора типа косилки, правильности ее монтажа и агрегирования ее с соответствующим трактором. Если по статистике из 100 случаев кошения в 95 – косилку выбирают правильно, в 90 случаях правильно выполнен монтаж и в 85 – осуществлено правильное агрегирование, то с какой вероятностью Р (показателем эффективности) можно ожидать эффективное кошение в очередном случае?

(Ответ: Р=0,72675)

Задача 17

Если вероятность отказа: трубопроводов системы торможения q_1=0,001; любого из 6 тормозных цилиндров $q_2=q_3=q_4=q_5=q_6=$ $=q_7$=0,001; главного тормозного цилиндра q_8=0,0009; вакуумного усилителя q_9=0,0015; недостатка тормозной жидкости q_{10}=0,0015; наличия воздуха в системе q_{11}=0,002; несвоевременного реагирования водителя q_{12}=0,003; действия других помех и причин q_{13}=0,002, то какова вероятность (надежность) Р безусловно эффективного торможения автомобиля?

(Ответ: Р=0,982)

Задача 18

В хозяйстве имеются три 4-х тонных прицепа, три 5-тонных и два 6-тонных. За грузом отправляются 2 трактора со случайно взятыми прицепами. По прибытии к грузу оказалось, что его масса 11 тонн. Какова вероятность, что груз будет забран полностью?

(Ответ: $P=0{,}25$)

Задача 19

Решить задачу 4 с четырьмя элементами R_i, $i=\overline{1,4}$, обладающими надежностями $p_1=0{,}99$; $p_2=0{,}98$; $p_3=0{,}97$; $p_4=0{,}96$.

(Ответ: $P=0{,}90345024$; $Q=0{,}09654976$)

Задача 20

Решить задачу 6 с четырьмя элементами $R_i=\overline{1,4}$, вероятности отказов которых равны $q_1=0{,}001$; $q_2=0{,}002$; $q_3=0{,}003$; $q_4=0{,}004$.

(Ответ: $P \approx 0{,}99003$; $Q \approx 0{,}00997$)

Задача 21

На схеме 6 для R_1 дано $p_1=0{,}995$; для R_2 дано $q_2=0{,}015$. Остальные три элемента обладают одинаковой надежностью p. В каких границах заключается p, если от схемы требуется $P \geq 0{,}95$?

(Ответ: $0{,}9897 \leq p \leq 1$)

Задача 22

На схеме 6 все пять элементов R_i, $i=\overline{1,5}$ имеют одинаковую вероятность отказа q. В каких границах заключено число q, если вся схема имеет показатель отказа $Q \leq 0{,}01$?

(Ответ: $0 \leq q \leq 0{,}002$)

§3. Параллельное соединение

3.1 Методические указания

В данном и следующем параграфах схему с параллельно соединенными ветвями считаем работающей, если работает хотя бы одна ее ветвь (если не оговорено иное).

Задача 23

Для уборки картофеля имеются два грузовых автомобиля. Вероятность p_1 (надежность) того, что первый из них исправен и будет работать равна 0,7; для второго автомобиля эта вероятность p_2 (надежность) равна 0,6. Какова вероятность (надежность) P того, что на уборке будет работать хотя бы один автомобиль? Какова вероятность Q того, что уборка не состоится? Построить структурно-логическую схему задачи.

Решение.

Событие A – на уборке будет работать первый автомобиль;

Событие B – на уборке будет работать второй автомобиль;

Событие A+B – на уборке будет работать хотя бы один автомобиль;

По формуле (13) получим:

$$P = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Так как события A и B можно считать независимыми (друг от друга), то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, и получаем:

$$P = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 =$$

$$= 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 1{,}3 - 0{,}42 = 0{,}88.$$

Пусть $\overline{A}$ - первый автомобиль не прибыл на уборку;

$\overline{B}$ - второй автомобиль не прибыл на уборку.

Тогда $\overline{A}\cdot\overline{B}$ - ни один автомобиль не прибыл на уборку (это эквивалентно тому, что уборка не состоится) и

$$Q = P(\overline{A}\cdot\overline{B}) = P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}) = [1-P(A)]\cdot[1-P(B)] =$$

$$= [1-0{,}7]\cdot[1-0{,}6] = 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}12$$

Заметим, что также Q=1-P=1-0,88=0,12.

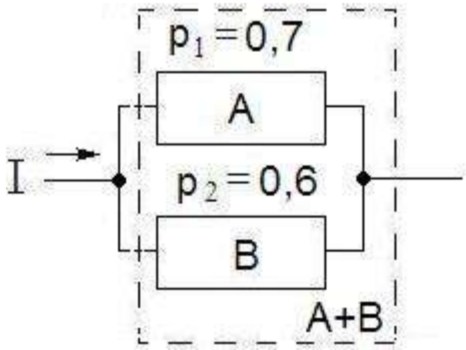

Схема 9 – структурно-логическая схема задачи.

Ответ: P=0,88; Q=0,12.

Задача 24

В хозяйстве имеются три грузовых автомобиля. Вероятность того, что первый из них примет участие в уборке зерна в запланированный срок равна p_1=0,7. Для второго и третьего эти вероятности равны соответственно p_2=0,6 и p_3=0,5. Какова вероятность P уборки зерна в запланированный срок, если для этого достаточно работы хотя бы одного автомобиля? Какова вероятность Q того, что уборка в запланированный срок не состоится?

Решение.

Пусть событие D – уборка произведется в запланированный срок.

Если события A, B, C означают, что в уборке примут участие соответственно 1-й, 2-й, 3-й автомобили, то $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ означают, что в уборке не примут участие соответственно 1-й, 2-й, 3-й автомобили. При этом:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p_1 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 = q_1$$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - p_2 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4 = q_2$$

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - p_3 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 = q_3$$

По определению суммы, событие A+B+C означает, что произойдет хотя бы одно событие из A,B,C, то есть в уборке сможет участвовать хотя бы один автомобиль. Поэтому D=A+B+C, и, считая события A,B,C независимыми в совокупности, из (23) получаем:

$$P = P(D) = P(A + B + C) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) =$$

$$= 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$$

Очевидно, что Q=1-P=1-0,94=0,06.

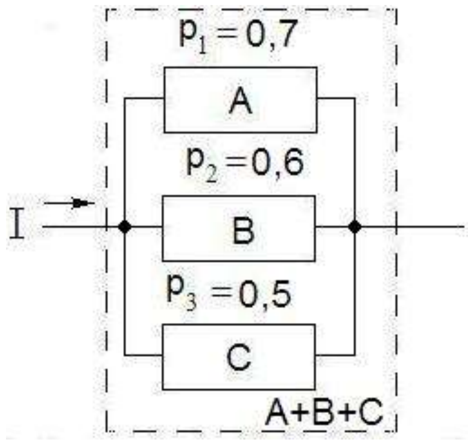

Схема 10 – структурно-логическая схема задачи.

Ответ: P=0,94; Q=0,06.

Задача 25

На схеме 11 два независимых друг от друга гидронасоса R_1 и R_2 с надежностями p_1=0,9 и p_2=0,8 работают параллельно, и при открывании крана К рабочая жидкость I подается в систему А либо сразу по двум имеющимся каналам (в случае, если оба насоса работают), либо только по одному каналу, если откажет один насос.

Вся схема считается работающей (не отказавшей), если жидкость в систему А поступает. В противном случае схема считается отказавшей.

Найти вероятность срабатывания Р (надежность) схемы и вероятность Q ее отказа.

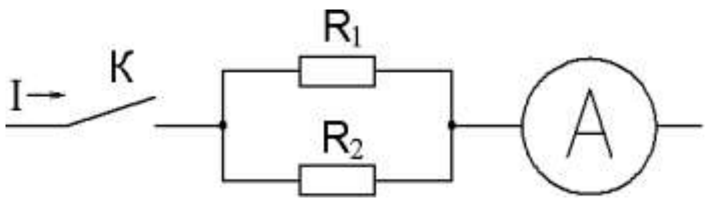

Схема 11.

Решение.

Очевидно, схема будет считаться сработавшей, если сработает (не откажет) хотя бы один из насосов R_1 и R_2.

Введем обозначения событий:

B - насос R_1 сработает (не выйдет из строя);

C - насос R_2 сработает (не выйдет из строя);

G - схема сработает; A – в систему А поступает жидкость.

Тогда по смыслу суммы событий получим, что

B+C – хотя бы один насос сработает (не откажет хотя бы один).

По теореме сложения вероятностей (13) получаем:

$$P(B+C)=P(B)+P(C)-P(BC), \qquad (28)$$

а поскольку B и C – независимы, то, согласно формуле (17),

$$P(BC)=P(B)\cdot P(C). \qquad (29)$$

С учетом (28) и (29) получаем:

$$P=P(G)=P(A)=P(B+C)=P(B)+P(C)-P(B)\cdot P(C)=p_1+p_2-p_1\cdot p_2=$$
$$=0{,}9+0{,}8-0{,}9\cdot 0{,}8=0{,}98 \text{ (т.е. 98\%)}; \; Q=1-P=1-0{,}98=0{,}02 \text{ (т.е. 2\%)}.$$

Ответ: P=0,98; Q=0,02.

Задача 26

На схеме 11 известны вероятности отказов $q_1=0{,}15$ и $q_2=0{,}20$ двух независимо срабатывающих элементов R_1 и R_2. Найти P и Q схемы.

Решение.

Введем обозначения событий:

$\overline{B}$ - откажет элемент R_1; $\overline{C}$ - откажет элемент R_2.

Тогда $\overline{B}\cdot\overline{C}$ - откажут одновременно оба элемента (что равносильно отказу $\overline{G}$ всей схемы).

Поскольку элементы R_1 и R_2 независимы друг от друга, то с учетом (17) получаем:

$$Q = P(\overline{G}) = P(\overline{B}\cdot\overline{C}) = P(\overline{B})\cdot P(\overline{C}) = q_1\cdot q_2 = 0{,}15\cdot 0{,}20 = 0{,}03,$$

$$P=1-Q=1-q_1\cdot q_2=1-0{,}15\cdot 0{,}20=1-0{,}03=0{,}97. \qquad (30)$$

Ответ: Q=0,03; P=0,97.

Задача 27

На схеме 11 надежность элемента R_1 равна $p_1=0{,}95$, а вероятность q_2 отказа элемента R_2 равна 0,15. Найти P и Q схемы, если элементы ее работают независимо друг от друга.

Решение.

Найдем прежде Q.

Пусть B – срабатывание R_1; $\overline{B}$ - отказ R_1; C – срабатывание R_2; $\overline{C}$ - отказ R_2;

$\overline{B}\cdot\overline{C}$ - отказ обоих элементов; $\overline{G}$ - отказ схемы.

Тогда с учетом (25) получим:

$$Q = P(\overline{G}) = P(\overline{B}\cdot\overline{C}) = P(\overline{B})\cdot P(\overline{C}) = q_1\cdot q_2 = (1-p_1)q_2 =$$
$$= (1-0{,}95)\cdot 0{,}15 = 0{,}05\cdot 0{,}15 = 0{,}0075,$$

откуда:

$$P = 1 - Q = 1 - 0{,}0075 = 0{,}9925.$$

Ответ: Q=0,0075; P=0,9925.

Задача 28

На схеме 12 три независимых параллельно соединенных элемента R_i, i=1,2,3, имеют вероятности отказов q_1=0,10; q_2=0,11; q_3=0,12. Найти P и Q схемы.

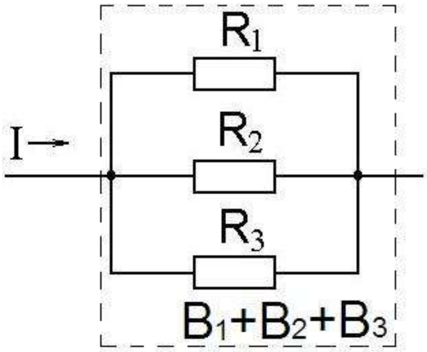

Схема 12.

Решение.

Найдем прежде вероятность отказа Q схемы 12.

Пусть B_1 – срабатывание R_1; $\overline{B}_1$ - отказ R_1;

B_2 – срабатывание R_2; $\overline{B}_2$ - отказ R_2;

B_3 – срабатывание R_3; $\overline{B}_3$- отказ R_3;

$B_1 + B_2 + B_3$ - срабатывание хотя бы одного элемента;

$\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3$- отказ всех элементов;

G – срабатывание схемы;

$\overline{G}$ - отказ схемы.

Очевидно, отказ схемы $\overline{G}$ эквивалентен одновременному отказу $\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3$ всех элементов R_i, $i=\overline{1,3}$. Поэтому:

$$Q = P(\overline{G}) = P(\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3) = P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 =$$
$$= 0{,}10 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}12 = 0{,}00132;$$

$$P = P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - Q = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - 0{,}00132 = 0{,}99868.$$

Ответ: Q=0,00132; P=0,99868.

Задача 29

На схеме 12 три независимых элемента R_i, $i=\overline{1,3}$, имеют надежности p_1=0,9; p_2=0,8; p_3=0,7. Найти P и Q.

Решение.

Обозначим события:

B_1 – срабатывание R_1; $\overline{B}_1$- отказ R_1;

B_2 – срабатывание R_2; $\overline{B}_2$- отказ R_2;

B_3 – срабатывание R_3; $\overline{B}_3$- отказ R_3;

G – схема работает;

$\overline{G}$ - отказ схемы.

$B_1 + B_2 + B_3$ - срабатывание хотя бы одного элемента;

$\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3$- отказ всех элементов.

Так как $\overline{G} = \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3$, и согласно (25), q_i=1-p_i, то

$$Q = P(\overline{G}) = P(\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3) = P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 =$$
$$= (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = (1 - 0{,}9)(1 - 0{,}8)(1 - 0{,}7) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006,$$
$$P = P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - Q = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994 \ (= 99{,}4\%).$$

Ответ: Q=0,006; P=0,994.

3.2. Задачи для самостоятельного решения

Решить задачи 30-43 и построить их структурно-логические схемы.

Задача 30

На данной дороге имеются две заправочные станции А и В, каждая их которых способна обеспечить топливом весь транспортный поток. Вероятность функционирования станции А равна 0,7; станции В-0,5. Какова вероятность Р обеспечения топливом транспорта на этой дороге?

(Ответ: Р=0,85)

Задача 31

Для разработки грунтов механизированное предприятие имеет четыре экскаватора, надежности которых (вероятности что будут работать) на каждый день составляют соответственно p_1=0,2; p_2=0,4; p_3=0,5; p_4=0,6. Какова вероятность Р того, что в данный день грунт будет разрабатываться, если для этого достаточно, готовности к работе хотя бы одного экскаватора?

(Ответ: Р=0,904)

Задача 32

Решить задачу 31, если вероятности невыхода на работу (вероятности отказов) экскаваторов q_1=0,8; q_2=0,75; q_3=0,7; q_4=0,65.

(Ответ: P=0,727)

Задача 33

Для устойчивой работы ДВС требуется, чтобы устойчиво работали все его 4 цилиндра. Пусть вероятность отказа любого из четырех его цилиндров равна 0,01. Какова вероятность Q неустойчивой работы двигателя?

(Ответ: Q=0,0394)

Задача 34

Для устойчивой работы ДВС требуется, чтобы устойчиво работали все его 4 цилиндра. Пусть вероятность отказа каждого цилиндра равна числу q. В каких границах должно содержаться число q, чтобы надежность P двигателя в целом была не менее 0,98?

(Ответ: $0 \leq q \leq 0{,}005$)

Задача 35

Решить задачу 25, в которой надежности p_1=0,96 и p_2=0,85.

(Ответ: Q=0,006; P=0,994)

Задача 36

На схеме 11 известны вероятности отказов q_1=0,3 и q_2=0,4 двух независимо друг от друга срабатывающих элементов R_1 и R_2. Рассчитать P и Q схемы.

(Ответ: Q=0,12; P=0,88)

Задача 37

На схеме 11 надежность элемента R_1 равна 0,98, а вероятность отказа R_2 равна 0,3. Найти P и Q схемы, если ее элементы работают независимо друг от друга.

(Ответ: Q=0,006; P=0,994)

Задача 38

На схеме 11 надежность элемента R_1 равна p_1=0,98. Какова должна быть вероятность отказа q_2 элемента R_2, чтобы в среднем из 1000 случаев замыкания ключа К в 999 попытках схема срабатывала?

(Ответ: $q_2 \leq 0{,}05$)

Задача 39

На схеме 11 вероятность отказа q_1 элемента R_1 равна 0,16. Какова надежность p_2 элемента R_2, если в 196 случаях из 200 замыканий ключа К схема срабатывает?

(Ответ: p_2=0,875)

Задача 40

На схеме 12 элементы R_i, $i=\overline{1,3}$, срабатывают независимо друг от друга. Вероятности отказов первых двух элементов равны q_1=0,21; q_2=0,22, а надежность третьего p_3=0,87. Найти вероятность P срабатывания схемы при замыкании ключа К.

(Ответ: P=0,989)

Задача 41

На схеме 12 дано: q_1=0,13; q_2=0,14. Какова должна быть надежность p_3 элемента R_3, чтобы надежность P всей схемы была бы не менее 0,999?

(Ответ: $p_3 \geq 0{,}9451$)

Задача 42

Пакет изготавливается из трех параллельно соединенных элементов R_i, $i=1,2,3$, с одинаковой годовой надежностью p.

Известно, что в среднем из 125 установленных пакетов через год их работы годными остаются 117 (пакет считается годным, если в его составе работает хотя бы один из элементов R_i). Приблизительно найти годовую надежность p элементов R_i.

(Ответ: $p \approx 0{,}6$)

*** Задача 43**

Пакет изготовляют из четырех параллельно соединенных одинаковых независимо работающих элементов R_i, $i=\overline{1,4}$, каждый с надежностью p=0,9. Пакет способен выполнять свои функции, если в нем сохраняют работоспособность хотя бы 2 элемента. Найти надежность P пакета.

(Ответ: P=0,9963)

§4. Смешанное соединение

4.1 Методические указания

Задача 44

При замыкании ключа К на схеме 13 рабочая жидкость I подается двумя гидронасосами R_1 и R_2, работающими параллельно, через фильтр F в систему A. Вероятность того, что R_1 не выйдет из строя равна $p_1=0{,}9$; для R_2 эта вероятность равна $p_2=0{,}75$, а для фильтра $p_F=0{,}95$. Какова вероятность P того, что жидкость в систему A подаваться будет? Все элементы отказывают независимо друг от друга.

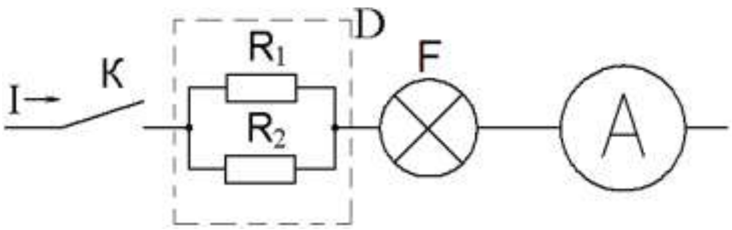

Схема 13.

Решение.

Обозначим события:

D – жидкость прошла через блок D (блок D сработал);

F - жидкость прошла через фильтр F (фильтр не вышел из строя);

R_1 – работает гидронасос R_1 (сработал R_1);

R_2 – работает гидронасос R_2 (сработал R_2);

G – схема работает (жидкость подается в систему A).

Очевидно, что $G=D\cdot F$; $D=R_1+R_2$ (т.к. пройти через блок D это все равно, что пройти либо через R_1, либо через R_2, либо по обеим веткам, т.е. в целом хотя бы по одной ветке: R_1 или R_2).

Имеем:

$$P = P(G) = P(D \cdot F) = (\text{в силу независимости}) = P(D) \cdot P(F) =$$
$$= P(R_1 + R_2) \cdot P(F) = (P(R_1) + P(R_2) - P(R_1) \cdot P(R_2)) \cdot P(F)$$
$$= (0{,}9 + 0{,}75 - 0{,}9 \cdot 0{,}75) \cdot 0{,}95 = 0{,}92625.$$

Ответ: P=0,92625.

Задача 45

На схеме 14 при срабатывании электромагнитного клапана КМ, жидкость I под действием параллельно работающих насосов подается через фильтр грубой очистки R_1 и тонкой очистки Л в систему А. Вероятности выхода из строя элементов цепи даны: q_1=0,1; q_2=0,2; q_3=0,3; $q_Л$=0,05; $q_{КМ}$=0,01. Какова вероятность снабжения системы А жидкостью?

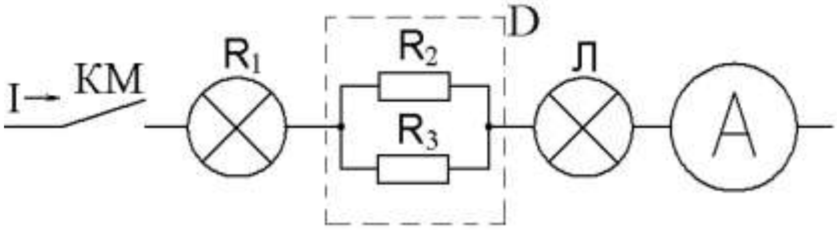

Схема 14.

Решение.

Система А будет снабжаться, если одновременно сохранят работоспособность четыре блока: R_1, D, Л и КМ.

Если G – снабжение системы А, то $G = R_1 \cdot D \cdot Л \cdot КМ$- произведение событий. Тогда:

$$P(G) = P(R_1 \cdot D \cdot Л \cdot КМ) = P(R_1) \cdot P(D) \cdot P(Л) \cdot P(КМ), \qquad (31)$$

где $P(R_1)$= |вероятность срабатывания элемента R_1| =1-q_1=0,9; (32)

P(D)= |вероятность прохождения жидкости через блок D или невыхода D из строя|=1-Q(D)=1-$q_2 \cdot q_3$=1-0,2·0,3=1-0,06=0,94; (33)

$$P(Л)=1-P(\overline{Л})=1-q_Л=1-0{,}05=0{,}95; \quad (34)$$

$$P(КМ)=1-P(\overline{КМ})=1-q_{КМ}=1-0{,}01=0{,}99. \quad (35)$$

Подставляя в (31) результаты из (32)-(35), получаем:

$$P=P(G)=0{,}9\cdot 0{,}94\cdot 0{,}95\cdot 0{,}99\approx 0{,}79566.$$

Ответ: P=0,79566.

Задача 46

Какова вероятность загорания лампы Л на схеме 15 (т.е. надежность P схемы) при запитывании обмотки электромагнитного реле с нормально разомкнутым контактом КМ, если известны надежности элементов $p_1=p_2=0{,}9$; $p_3=p_4=0{,}8$; $p_Л=0{,}98$; $p_{КМ}=0{,}99$. Отказ каждого элемента считать независимым от состояния других элементов.

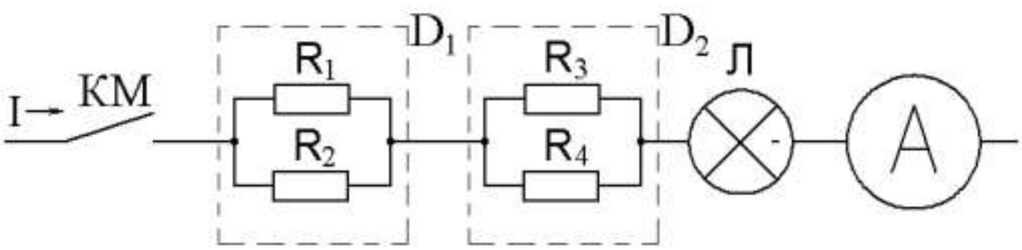

Схема 15.

Решение.

Лампа загорится (событие G), если электрический ток I пройдет через блок D_1, через блок D_2, через лампу Л, и через контакт КМ (т.е. все блоки сработают). Таким образом, $G=D_1\cdot D_2\cdot Л\cdot КМ$.

По формуле (22) получим:

$$P = P(G) = P(D_1 \cdot D_2 \cdot Л \cdot КМ) = P(D_1) \cdot P(D_2) \cdot P(Л) \cdot P(КМ) =$$
$$= P(R_1 + R_2) \cdot P(R_3 + R_4) \cdot P(Л) \cdot P(КМ) = [P(R_1) + P(R_2) - P(R_1) \cdot P(R_2)] \cdot$$
$$\cdot [P(R_3) + P(R_4) - P(R_3) \cdot P(R_4)] \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99 =$$
$$= [0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}9 \cdot 0{,}9] \cdot [0{,}8 + 0{,}8 - 0{,}8 \cdot 0{,}8] \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99 =$$
$$0{,}99 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99 \approx 0{,}922.$$

Ответ: $P \approx 0{,}922$.

Задача 47

Технологический комплекс по очистке и обогащению полуфабриката I на схеме 16 состоит из двух параллельных поточных линий C_1 и C_2 и блока B_2 параллельно работающих аппаратов R_7, R_8, R_9.

Найти вероятность P прохождения обрабатываемого полуфабриката I из точки M_1 в точку M_2. Надежности элементов p_i даны на схеме. Отказы элементов независимы друг от друга.

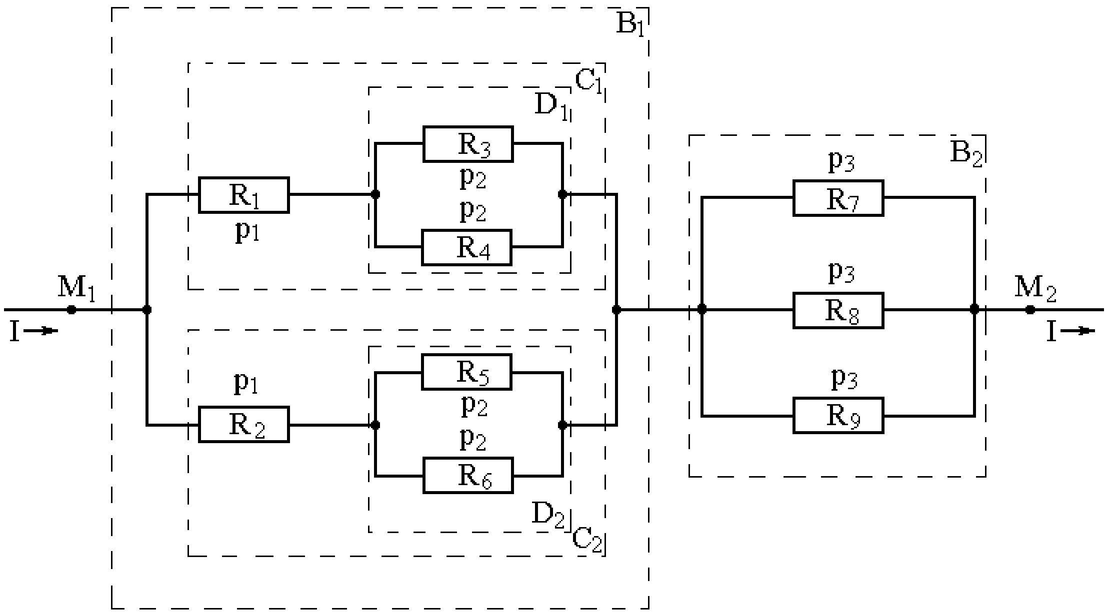

Схема 16.

Решение.

$$P = P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) = [P(C_1 + C_2)] \cdot [1 - Q(B_2)] =$$
$$= [P(C_1) + P(C_2) - P(C_1) \cdot P(C_2)] \cdot [1 - q(R_7) \cdot q(R_8) \cdot q(R_9)] =$$
$$= |\text{ поскольку } P(C_1) = P(C_2)| = [2 \cdot P(C_1) - P^2(C_1)] \cdot [1 - q_3^3] =$$
$$= [2 \cdot P(R_1 D_1) - P^2(R_1 D_1)] \cdot [1 - (1 - p_3)^3] =$$
$$= [2 \cdot P(R_1) \cdot P(D_1) - P^2(R_1) \cdot P^2(D_1)] \cdot [1 - (1 - p_3)^3] =$$
$$= [2 \cdot p_1 \{1 - Q(D_1)\} - p_1^2 \{1 - Q(D_1)\}^2] \cdot [1 - (1 - p_3)^3] =$$
$$= [2 \cdot p_1 \{1 - q_2 \cdot q_2\} - p_1^2 \{1 - q_2 \cdot q_2\}^2] \cdot [1 - (1 - p_3)^3] =$$
$$= [2 \cdot p_1 \{1 - (1 - p_2)^2\} - p_1^2 \{1 - (1 - p_2)^2\}^2] \cdot [1 - (1 - p_3)^3] =$$
$$= p_1 \{1 - (1 - p_2)^2\} [2 - p_1 \{1 - (1 - p_2)^2\}] \cdot [1 - (1 - p_3)^3].$$

Задача 48

Найти вероятность P выпуска продукции технологическим комплексом (надежность P комплекса), изображенного на схеме 17, имеющего m параллельных поточных линий, каждая из которых состоит из n элементов, если все элементы имеют одинаковую надежность p и отказывают независимо друг от друга.

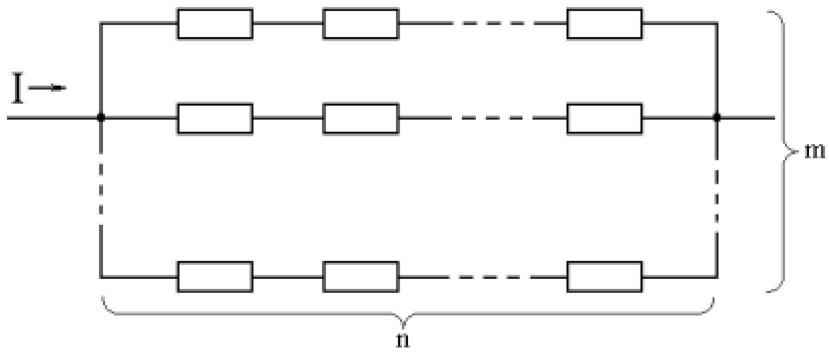

Схема 17.

Решение.

Надежность P_i отдельной линии – строки равна $P_i = p^n$, $i = \overline{1, m}$. Вероятность Q_i отказа линии – строки равна:

$$Q_i = 1 - P_i = 1 - p^n, i = \overline{1, m}.$$

Вероятность отказа Q всей схемы (всего комплекса) равна:

$$Q = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_m = [1 - p^n]^m.$$

Надежность схемы (комплекса):

$$P = 1 - Q = 1 - [1 - p^n]^m.$$

4.2. Задачи для самостоятельного решения

Ниже в задачах 49-70 все элементы отказывают независимо друг от друга.

Задача 49

На схеме 13 вероятность невыхода из строя фильтра F равна p_F=0,9. Надежности элементов R_1 и R_2 равны соответственно 0,8 и 0,7. Какова вероятность P снабжения системы A очищенной жидкостью?

(Ответ: P=0,846)

Задача 50

Какова вероятность P снабжения очищенной жидкостью системы A на схеме 13 при открывании крана K, если даны вероятности отказов q_1=0,3; q_2=0,4 и надежность фильтра p_F=0,96?

(Ответ: P=0,8448)

Задача 51

На схеме 13 дано: p_1=0,9; q_2=0,12; p_F=0,97. Какова вероятность P снабжения системы A при открывании крана K? Какова вероятность Q отказа схемы?

(Ответ: P=0,95836; Q=0,04164)

Задача 52

На схеме 13 дано: $p_1=p_2=0,85$; $q_F=0,01$. Найти вероятность P снабжения системы A при открывании K. Найти вероятность Q отказа схемы.

(Ответ: $P\approx 0,9677$; $Q\approx 0,0323$)

Задача 53

На схеме 13 дано: $q_1=0,1$; $q_2=0,2$; $q_F=q$. Найти вероятность Q отказа цепи (вероятность непоступления жидкости в систему A) при открывании K.

(Ответ: $Q=0,02+0,98q$)

Задача 54

На схеме 13 надежности $p_1=p_2=p$. Надежность фильтра F равна p_F. Выразить надежность P и показатель отказов Q схемы через параметры p, p_F и через параметры q и q_F (где $q=1-p$; $q_F=1-p_F$).

(Ответ: $P=[1-(1-p)^2]\cdot p_F$; $Q=1-[1-(1-p)^2]\cdot p_F$; $P=(1-q^2)(1-q_F)$; $Q=q_F(1-q^2)+q^2$)

Задача 55

Даны вероятности отказов элементов схемы 14: $q_1=0,11$; $q_2=0,12$; $q_3=0,13$; $q_Л=0,05=q_{КМ}$. Найти вероятность P снабжения системы A.

(Ответ: $P\approx 0,791$)

Задача 56

На схеме 14 дано: $q_1=0,2$; $p_2=0,7$; $p_3=0,6$; $q_Л=0,1$; $q_{КМ}=0,01$. Найти вероятность P снабжения системы A, если элементы сохраняют работоспособность автономно.

(Ответ: $P\approx 0,633$)

Задача 57

На схеме 14 q_1=0,1; $q_Л$=0,05; $q_{КМ}$=0,01. Надежности p_2=p_3=p. Каково число p, если вероятность снабжения системы А при запитывании обмотки реле клапана КМ равна 0,8?

(Ответ: $p \approx 0{,}7657$)

Задача 58

Вычислить вероятность P снабжения системы А на схеме 15 при запитывании обмотки реле клапана КМ, если даны вероятности выхода из строя независимых элементов: q_1=q_2=0,02; q_3=q_4=0,03; $q_Л$=0,01; $q_{КМ}$=0,001.

(Ответ: $P \approx 0{,}9877$)

Задача 59

Рассчитать надежность P комплекса на схеме 16, приняв:
а) p_1=p_2=p_3=0,9; б) p_1=p_2=p_3=0,5. Сравнить результаты.

*** Задача 60**

Рассчитать надежность P комплекса на схеме 18, считая все элементы однотипными с надежностями (вероятностями срабатывания) p. Комплекс работает, если работает хотя бы одна ее ветвь - строка. В свою очередь, ветвь – строка считается отказавшей, если откажет хотя бы один ее элемент.

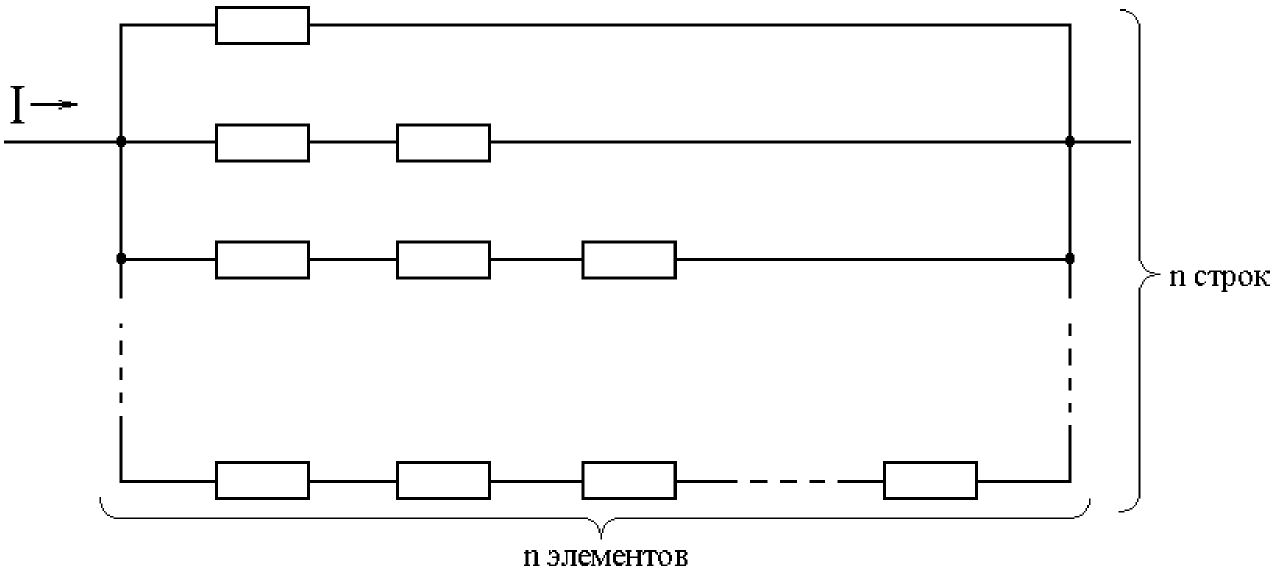

Схема 18.

(Ответ: $P=1-(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\dots(1-p^n)$)

*** Задача 61**

На схеме 19 надежность каждого из пяти токопроводящих элементов равна p. Найти надежность P всей цепи. Указание: воспользоваться формулой (14).

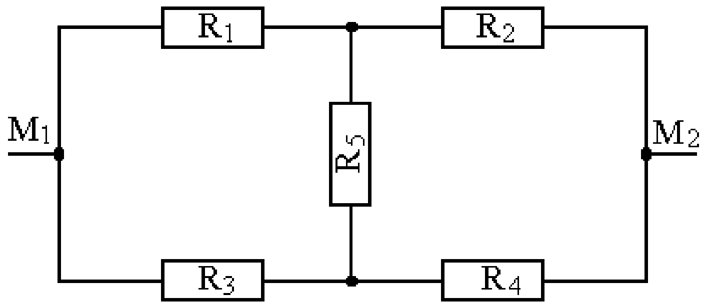

Схема 19.

(Ответ: $P=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$)

*** Задача 62**

Если в схеме 17 задачи 48 положить n=m, то для надежности всей цепи получим:

$$P=1-(1-p^n)^n. \qquad (36)$$

Выяснить, что будет происходить с надежностью P в формуле (36), когда число n будет неограниченно увеличиваться. Указание: произвести логарифмирование и воспользоваться правилом Лопиталя.

Решить задачи 63-70 и построить их структурно-логические схемы

Задача 63

Для разработки грунтов предприятие имеет два экскаватора с надежностями $p_1=0,6$ и $p_2=0,7$ и три бульдозера с надежностями $p_3=0,4$; $p_4=0,5$; $p_5=0,6$. Какова вероятность P того, что грунт будет разрабатываться, если для этого достаточно хотя бы одной работающей пары экскаватор-бульдозер?

(Ответ: P=0,7744)

Задача 64

Два перерабатывающих сырье завода, работающих с вероятностями $p_1=0,6$ и $p_2=0,75$, снабжают полуфабрикатами предприятие, где из полуфабриката получают товарную продукцию на двух однотипных поточных линиях, работающих с вероятностями 0,5 и 0,65, после чего готовый продукт проходит контроль качества с вероятностью 0,95. Какова вероятность выпуска готовой качественной продукции? Отказы каждого участка работ считать независимыми от работы других участков.

(Ответ: P≈0,723)

Задача 65

В населенном пункте три автомагазина, где данную деталь можно купить с вероятностью соответственно 0,4, 0,5 и 0,55 и три автомастерских с вероятностью отремонтироваться в них соответственно 0,6, 0,65 и 0,7. Вероятность не пройти техосмотр на отремонтированном автомобиле равна 0,1. Какова вероятность получить талон техосмотра?

(Ответ: $P \approx 0{,}754$)

Задача 66

В городе имеются два асфальтовых завода с вероятностями работы $p_1=0{,}8$ и $p_2=0{,}9$. На асфальтоукладочных работах обязательно наличие хотя бы по одному экземпляру механизмов: асфальтоукладчиков, катков и автомобилей-самосвалов. Предприятие-исполнитель работ имеет три асфальтоукладчика, вероятности выхода на работу которых равны $p_3=0{,}4$; $p_4=04$; $p_5=0{,}6$; три катка с вероятностями $p_6=0{,}5$; $p_7=0{,}6$; $p_8=0{,}7$ и четыре автомобиля-самосвала с вероятностями быть исправными $p_9=0{,}2$; $p_{10}=0{,}3$; $p_{11}=0{,}4$; $p_{12}=0{,}5$.

С какой надежностью можно ожидать проведения мероприятия асфальтирования дороги в запланированный день в период с 01 мая по 30 сентября, если оно допустимо только в солнечный день, количество наступлений которых за данный период в среднем бывает 102 раза?

(Ответ: $P \approx 0{,}44$)

Задача 67

На выезде из города имеются две автозаправки: А и В. Вероятность функционирования для первой P(A) равна 0,8; для второй P(B)=0,6. Какова вероятность того, что:

1) обе заправки работают;

2) работает хотя бы одна;

3) первая не работает;

4) вторая не работает;

5) обе не работают;

6) хотя бы одна не работает;

7) работает только первая;

8) работает только вторая;

9) не работает только первая;

10) не работает только вторая;

11) работает ровно одна;

12) не работает ровно одна;

13) работают ровно две?

Ответ:

1) P(AB)=0,48; 2) P(A+B)=0,92; 3) $P(\overline{A}) = 0{,}2$;

4) $P(\overline{B}) = 0{,}4$; 5) $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 0{,}08$; 6) $P(\overline{A} + \overline{B}) = 0{,}52$;

7) $P(A \cdot \overline{B}) = 0{,}32$; 8) $P(\overline{A} \cdot B) = 0{,}12$; 9) $P(\overline{A} \cdot B) = 0{,}12$;

10) $P(A \cdot \overline{B}) = 0{,}32$; 11) $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = 0{,}44$;

12) $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = 0{,}44$; 13) P(AB)=0,48.

Задача 68

В цехе имеются три сварочных аппарата, для которых вероятности быть в исправном состоянии составляют соответственно p_1=P(A)=0,9; p_2=P(B)=0,8; p_3=P(C)=0,7. Какова вероятность того, что в данный момент:

1) исправны все аппараты;

2) исправен хотя бы один;

3) исправен ровно один;

4) исправны ровно два;

5) исправны хотя бы два;

6) неисправен хотя бы один;

7) неисправен ровно один;

8) неисправны ровно два;

9) все неисправны?

Ответ:

1) P(ABC)=0,504; 2) P(A+B+C)=0,994;

3) $P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C) = 0{,}092;$

4) $P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C) = 0{,}092;$

5) $P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C) = 0{,}092;$

6) 1- P(ABC)=0,496;

7) $P(\overline{A}BC) + P(A\overline{B}C) + P(AB\overline{C}) = 0{,}398;$

8) $P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C}) = 0{,}092;$

9) $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 0{,}006$

Задача 69

Из двух заправочных станций на дороге первая обеспечивает транспортный поток топливом на 70%, а вторая на 60%. При этом вероятность работы P(A) первой станции равна 0,8, а второй P(B)=0,9. Какова вероятность того, что дорога будет обеспечена топливом:

а) полностью;

б) не менее, чем на 60%;

в) не более, чем на 60%;

г) не более, чем на 70%;

д) ровно на 60%;

е) ровно на 70%;

ж) не менее, чем на 70%;

з) более, чем на 90%;

и) более, чем на 60%;

к) более, чем на 70%;

л) не менее 60%, но и не более 70%;

м) более, чем на 60%, но не более, чем на 70%;

н) более 0%;

о) более 60%;

п) показатель обеспеченности, будучи больше нуля, не попадает в промежуток (60%;100%), то есть показатель =60% или ≥100%?

Ответ: а) P(AB)=0,72; б) P(A+B)=0,98; в) $P(\overline{A}) = 0{,}2$;

г) $P(\overline{B}) = 0{,}1$; д) $P(B\overline{A}) = 0{,}18$; е) $P(A\overline{B}) = 0{,}08$; ж) P(A)=0,8;

з) P(AB)=0,72; и) P(A)=0,8; к) P(AB)=0,72; л) $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = 0{,}26$;

м) $P(A\overline{B}) = 0{,}08$; н) P(A+B)=0,98; о) P(A)=0,8; п) P(B)=0,9.

Задача 70

В клетках таблицы приведены вероятности потерь и недоборов кормовой массы работающими машинами в технологической цепочке сбора и приготовления фуража:

Вид машин	Вероятность потерь массы	
	1% и более	5% и более
Косилки травы	0,99	0,7
Сеноворошилки	0,8	0,1
Тракторные грабли	0,95	0,2
Рулонный пресс-подборщик	0,95	0,5
Обмоточник (пленкой)	0,01	0,001
Прицеп-платформа для перевозки рулонов	0,1	0,01
Мобильные смесители-кормораздатчики	0,85	0,01

Приблизительно оценить вероятность того, что суммарная потеря S составит: а) около 15% и более; б)около 20% и более.

(Ответ: $P(S \geq 15\%) \approx 0{,}1504$; $P(S \geq 20\%) \approx 0{,}007$)

Литература

1. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003.
2. В. Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2003.
3. Г. В. Горелова, И. А. Кацко. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением EXCEL. Ростов-на-Дону, Феникс, 2006.
4. А. Н. Бородин. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. СПб.: Лань, 2002.
5. В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1986.
6. А. И. Карасев. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Статистика, 1979.
7. Г. И. Агапов. Задачник по теории вероятностей. М.: Высшая школа, 1986.
8. Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. Теория вероятностей и её инженерные приложения. М.: Наука, 1988.
9. Г. Секей. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
10 А. С. Касаткин, М. В. Немцов. Электротехника. М.: Высшая школа, 1999.

Учебное издание

Захаров Игорь Петрович

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

с применением простейших теорем теории вероятностей
(методические указания)

для студентов-бакалавров по направлениям 110800 Агроинженерия, 151000 Технологические машины и оборудование, 190100 Наземные транспортно-технологические комплексы.

Редактор Павлютина И.П.

Подписано к печати 20.10.2012. Формат А 60 х 84 $^{1}/_{16}$. Бумага писчая.
Усл. п. л. 3,19. Тираж 100 экз. Изд.№2247.

Издательство Брянская государственная сельскохозяйственная академия
243365, Брянская обл. Выгоничский р-он, с.Кокино, Брянская ГСХА